

今の数論で非常に大切になった考え方は、実数と、各素数 p についての p 進数を、すべて平等な世界として考えに入れてみて、はじめていろいろなことがよくわかるということである。たとえば、先の (B) のグラフに有理点がないことは、いくらグラフをみてもわからないのであるが、これは実数の世界で考えていたからわからなかったのである。素数のことを思い出し、3 進数の世界で考えれば、 $x^2 + y^2 = 3$ の答えが 3 進数の世界にないことが、(ちょうど $x^2 + y^2 = -1$ の答えが実数の世界にないことが楽にわかるように) 3 進数に慣れればわかるので、有理数の答えもないとわかるのである (p 進数については、数論の名著、ボレピッチ/シャハレピッチ『整数論』上下、佐々木義雄訳、吉岡書店、1971、72年に詳しい)。

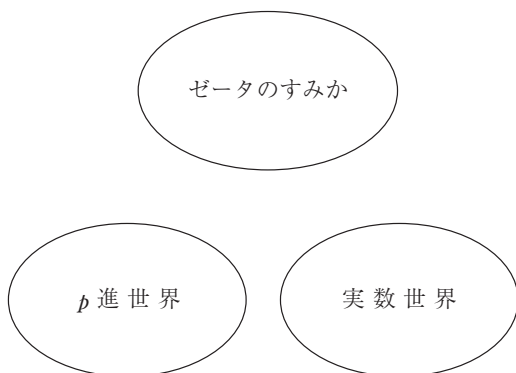
そして、こういう有理数に関するだけでなく、宇宙に関することも、実数と各素数 p についての p 進数をあわせて考えるべきだと思われるようになってきたのである。

数学も物理学も、『美女と野獣』の娘さんの心をとうとぶ方向に向かっているように思える。

(4) 類体論、『鶴の恩返し』

日本は数論が昔から盛んであり、黒川信重さんのご意見では、これは日本人の風呂好きに原因があるという。風呂から出る時 100 まで数えることにより、数の神髄にふれることになるのだという。たとえば、日本の数論の大成果に、1920 年頃、高木貞治さんが考えた、類体論と呼ばれる素数に関する理論がある。ここでは説明できず申しわけないのであるが、類体論は当時の数論の最高到達点であり、「世にも美しい理論」といわれる。

私が最近もっとも感銘を受けたのは、ゼータと、 p 進数や類体論という、本来は無関係のはずのものが美しい仕方で結びつくことである。たとえ話で申しわけないのであるが、類体論（これを『鶴の恩返し』の話（木下順二『夕鶴・彦市ばなし』新潮文庫、1954 年）の男主人公「与ひょう」の家とみる）の中に、ゼータが変身しつつ（鶴が娘に姿を変える感じがある）、歩き慣れない p 進数の山道を通って入っていく、という現象をみつめることで、たとえば図 (C) の有理点のことなどがよくわかるのである。なぜ、そんなにまでして、ゼータは懸命に類体論の中にやってくるのか、私は心底驚いたのである。いろいろな謎が明らかにされていっても、ふしぎは深まっていくと思われる。



まことに説明不足で申しわけないのであるが、「ややこしい数学的説明はさておいても、自分の感動を出すよう」との、編集のかたのおすすりも思ひ、ややこしい説明をすつとばして、最近の数学研究集会の報告集に自分の感激を書いた拙文をここに並べさせていたたく。

鶴が恩を返すために、娘に姿を変えて与ひょうの家のしきいを越えるように、ゼータの値は……や……に姿を変えて、類体論のしきいを越えるのである。鶴のそこまでの激しい思ひを、われわれは厳肅に受けとめたい。

筆者の研究方法は、ゼータの心を推しはかることであつた。ゼータは必ずそこを越えてゆく。実数の中で定義されたゼータにとっては、大変苦手な、 p 進の山道を、ゼータは与ひょうの

家にゆくために、懸命に越えていく。

そこにあらわされる、ゼータの値のあふれる思いは何か。その根源は何か。それは、どこに電話をして聞けばわかるのか。

筆者は数学と日本昔話を混同しており、数学研究の報告集にそのような「混同」をのせてよいものかと思ったのであるが、お年を召した数学者のかたまでが共感してくださり、私はかえって感激したのであった（それに力を得て、英文の論文にも、こういう文を、『鶴の恩返し』の話の簡単な説明とともに入れた）。

こういう混同は、あまりに人間っぽい数学の把握、研究方法だと言われたとしても、数学の深い真理がどちらの方角にあるとか、そもそも数学で何が深いことであるとかかは、結局われわれのもっている人間的感受性によってわかるしかないものだと思うのである。

(5) 要約

話が長くなってしまったが、まとめると、実数世界の他に、各素数 p にまつわる p 進数の世界があり、そしてその両者の上に、現代数学がまだとらえていない「ゼータのすみか」があるらしいということである。今の数学は、このゼータのすみかがどんな様子であるかを、さぐっているところであると言える。

4 ゼータのすみか

ゼータのすみかに関係がありそうな場所について、考えたことを

述べる。盆で帰省した折に考えたことなので、筆者の郷里（愛媛県）の話になってしまって恐縮である。

1) 七折峠の七折地藏菩薩は、亡父が、「昔子どもの頃行ったがどこにあったか思い出せない、大谷山の奥のお堂」と言っていたことがあり、訪れがいがあつた。この峠は、どこにあるかが知れた後、父がその短かった老境に入る頃に、母と自転車で来たことがあり（かなりハードな道である）、私も妻と自転車で来たことがある。峠に来て、途中の道にあつたいろいろのほこら祠のことを考えてみると、お堂や祠は、昔の人が神霊の宿りそうな所にこしらえたものと思うわけであるが、今宗教にふれずに言えば、それらは峠、山の頂、別れ道、大木、いなかの家の内や外の或る場所、沖の小島など、「詩の感じられる所」に昔の人が祠をこしらえてきたと思える。詩の才能のない私が、「詩の感じられる所」とは何か定義を知っているわけはなく、別の世界を感じる所、永遠の垣間見える所などといろいろ定義を考えてみるけれども、名案はない。結局、ゼータのすみかへの入り口としか言いようがない。

数学において、祠は、たとえば先のオイラーの式のそばに建っているようである。そこは感覚の鋭いオイラーのような人に霊気が感じられる場所であり、ゼータのすみかへの入り口であろう。それが別の世界や永遠への入り口であるとすれば（われわれは盆の行事で気がつくように、たいてい家族の一部をあの世に持っているのであるが）、幽明の境を越えた家族のだんらんにも通ずるのではあるまいか。

七折峠からみえる障子山の左手の、空がとくに奥まったあたりが

ゼータのすみかのようにも見える。

2) 郷里にある、泉の多い村落について述べたい。石鎚山系の水が一度地下に潜り、これが地面にあらわれる所にあたっていて、あちこちに泉がある。泉に湧いた水は川となって流れることになり、水田のあちこちを小さな川が、わかれ、また合流しながら流れている。そこで育った者はおそらく、道の地図と川の地図、両方の地図を心の中に持っているであろう。道の地図を実数世界に対応させれば、川の地図は p 進世界に対応させざるをえない。実数世界と p 進世界のまじりあう水田のあちこちで、ゼータの姿を季節の変わりめに何度か見かけたような気がするが、気のせいだろうか。

5 安藤昌益とみえがたい天の半球

天球が二つの半球からなるように、数の世界は二つの半球からなっている。実数半球と p 進半球である。われわれの現実生活から考えると、何らかの理由があって、後者はほとんどいつも地平の下に隠れていてみえにくい。ちょうど北半球に住む者にとっての南半球の夜空のようである。現実生活に限らず数学の歴史においても、後者に関することは前者に後れて発展している。ゼータの研究をするならば、二つの半球に思いをめぐらさざるをえない。

江戸時代の思想家安藤昌益は、その著『自然真営道』や『統道真伝』の中で、天球のうちで宇宙の頭は、地面の下に隠れがちのみえにくい半球の方であって、そちらのみえにくい半球の方が大切であると説いた。

「北極は人常に視て、南極は常に視えず」——ここから安藤昌益